Das Kalkül des natürlichen Schließens

Beweise schreiben wir in 4 Spalten auf:

Klasse	Zeilennummer	Satz	Annotation

Und was sollen die ganzen seltsamen Symbole und Buchstaben hier?

- φ,ψ Sätze, also Elementarsätze wie p, r, s, ... und komplexere Sätze wie z.B. $p \wedge q$
- 1,2,3 Zeilennummern. Diese können in einem Beweis anders sein!
- … Klasse der jeweiligen Zeile.
- …, … Übernehmen der Klassen aus <u>beiden</u> vorigen Zeilen.
- $\cancel{1}$ Diese Zeilennummer darf aus der Klasse gestrichen werden.

10 Regeln für *PropLog*

Annahme

1	1	ψ	A

Eine Annahme darf immer gemacht werden.
Sie hat nie eine andere Klasse als sich selbst!

Konditional-Intro

1	1	φ	A
…	2	ψ	
…, $\cancel{1}$	3	$\varphi \rightarrow \psi$	2 $\rightarrow$I (1)

Konjunktions-Intro

…	1	φ	
…	2	ψ	
… , …	3	$\varphi \wedge \psi$	1,2 $\wedge$ I

Konditional-Elim

…	1	$\varphi \rightarrow \psi$	
…	2	φ	
…, …	3	ψ	1,2 $\rightarrow$E

Konjunktions-Elim

…	1	$\varphi \wedge \psi$	…
…	2	φ	1 $\wedge$ E
…	3	ψ	1 $\wedge$ E

Es müssen nicht beide Konjunkte erzeugt werden, wenn sowieso nur eines benötigt wird!

reductio ad absurdum (RAA)

…	1	ψ	A
…, 1	2	φ	
…, 1	3	$\neg\varphi$	
…, …, $\cancel{1}$	4	$\neg\psi$	2, 3 RAA (1)

Eine RAA muss immer mit einer Annahme vorbereitet werden! Die Reihenfolge der Zeilen ist dabei egal. 1 kann auch nur in einer der beiden Klassen von 2 und 3 stehen.

Disjunktions-Intro

…	1	φ	
…	2	$\varphi \vee \psi$	1 $\vee$ I

Ψ darf beliebig gewählt werden!

Bikonditional-Intro

…	1	$\varphi \rightarrow \psi$	
…	2	$\psi \rightarrow \varphi$	
…, …	3	$\varphi \leftrightarrow \psi$	1, 2 $\leftrightarrow$ I

Disjunktions-Elim

…	1	$\varphi \vee \psi$	
…	2	$\neg \varphi$	
…, …	3	ψ	1, 2 $\vee$ E

Analog kann auch das andere Disjunkt erzeugt werden.

Bikondiional-Elim

…	1	$\varphi \leftrightarrow \psi$	
…	2	$\psi \rightarrow \varphi$	1 $\leftrightarrow$ E
…, …	3	$\varphi \rightarrow \psi$	1 $\leftrightarrow$ E

Es müssen nicht beide Konditionale erzeugt werden, wenn sowieso nur eines benötigt wird.

6 Regeln für *PredLog*

Universal-Intro

…	1	$\psi(a)$	
…	2	$\forall x\ \psi(x)$	1 $\forall$ I

Achtung: In der Klasse der Zeile 1 darf die Konstante a nicht vorkommen.

Existenz-Intro

…	1	$\varphi(a)$	
…	2	$\exists x\ \varphi(x)$	$\exists$ I

Darf immer gemacht werden.

Universal-Elim

…	1	$\forall x\ \varphi(x)$	
…	2	$\varphi(a)$	$\forall$ E

Darf immer gemacht werden, auch mit b,c, usw.

Existenz-Elim

…	1	$\exists x\ \varphi(x)$	
…	2	$\varphi(a)$	A
…,2	3	ψ	
…,1,~~2~~	4	ψ	1, 3 $\exists$ E (2)

Achtung: Zur Vorbereitung muss eine Instanz angenommen werden. Die Regel selbst verändert den Satz nicht sonder erlaubt nur das Tauschen der Klasse. ψ kann irgendein Satz sein, in dem a nicht vorkommt.

Identitäts-Intro

	1	a = a	= I

Darf immer gemacht werden, auch mit b, c, usw. Die Zeile hat keine Klasse.

Identitäts-Elim

…	1	a = b	
…	2	$\varphi(a)$	
…, …	3	$\varphi(b)$	1,2 = E

Generelle Hinweise zum Aufstellen von Beweisen im Kalkül

Beweisstrategien

Hier einige Strategien, die zwar **nicht immer** helfen, aber bei den meisten gültigen Satzfolgen zumindest eine erste Idee liefern, wie ein Beweis laufen kann:

- **„von hinten denken“:** Überlege dir, was für eine Art Satz die Konklusion ist, die du zum Schluss erzeugen möchtest. Mit welcher Regel können Sätze dieser Art überhaupt erzeugt werden? Wie wird also der letzte Schritt des Beweises aussehen?
    - Beispiel: Wenn die Konklusion ein Konditional ($\rightarrow$) ist, wird der letzte Schritt vermutlich eine Konditional-Intro ($\rightarrow$ I) sein.
    - Wenn die Konklusion ein Allsatz ($\forall$) ist, wird einer der letzten Schritte wohl eine Universal-Intro ($\forall$ I) sein. Zeige also erst einmal die Aussage im Bezugsbereich des Allquantors für irgendeine Individualkonstante.
    - Wenn die Konklusion eine Negation ist, wird der letzte Schritt eine RAA sein.
- **Widerspruchsbeweis:** Wenn die Konklusion nicht direkt aus den Prämissen hergeleitet werden kann, nimm eine Verneinung der Konklusion an und versuche, sie zum Widerspruch (falls vorhanden: mit den Prämissen) zu führen. Theoreme („Argumente ohne Prämissen“) werden fast immer auf diese Art und Weise bewiesen.

- **Beweis einer Disjunktion:** Wenn eine Disjunktion gezeigt werden soll, hilft es meist entweder eines der Disjunkte zu zeigen (da dann eine Disjunktionseinführung gemacht werden kann) oder einen Widerspruchsbeweis zu machen.

Fehler vermeiden

- Lerne die Regeln nicht einfach auswendig, sondern ihren Hintergrund und ihre Einsatzmöglichkeit, d.h. z.B. die Angaben, welche Art von Sätzen für Ihre Anwendung nötig ist. Beispiele:
  - Konditional-Intro und Existenz-Elim benötigen immer eine bestimmte Annahme zur Vorbereitung!
  - Von den sechs Regeln zu PredLog sind nur Existenz-Elim und Universal-Intro „problematisch“. Die anderen vier lassen sich im Prinzip immer anwenden.
  - Nur bei der Konditional-Intro, der RAA und der Existenz-Elim dürfen Annahmen aus der Klasse gestrichen werden! Sonst immer alle Nummern aus den Klassen der verwendeten Zeilen „mitnehmen“!
- Immer mit der Ruhe: Niemals zwei Regeln auf einmal anwenden!
  - Beispiel: Auf die beiden Sätze $p \leftrightarrow q$ und p kann nicht $\rightarrow$E angewendet werden, um q zu bekommen, sonder erst muss eine $\leftrightarrow$E gemacht werden, wodurch mensch $p \rightarrow q$ und dann schließlich mit $\rightarrow$E das gewünschte q erhält.
- Abgeleitete Regeln dürfen im Allgemeinen nicht verwendet werden
  Nur wenn dies in der Aufgabenstellung explizit erlaubt ist!

Semantische Bäume

9 Regeln für PropLog

1. $\neg\neg\varphi$ φ	2. $\varphi \wedge \Psi$ φ Ψ	3. $\neg(\varphi \wedge \Psi)$ $\neg\varphi$ $\neg\Psi$
4. $\varphi \vee \Psi$ φ Ψ	5. $\neg(\varphi \vee \Psi)$ $\neg\varphi$ $\neg\Psi$	8. $\varphi \leftrightarrow \Psi$ φ $\neg\varphi$ Ψ $\neg\Psi$
6. $\varphi \rightarrow \Psi$ $\neg\varphi$ Ψ	7. $\neg(\varphi \rightarrow \Psi)$ φ $\neg\Psi$	9. $\neg(\varphi \leftrightarrow \Psi)$ $\neg\varphi$ φ Ψ $\neg\Psi$