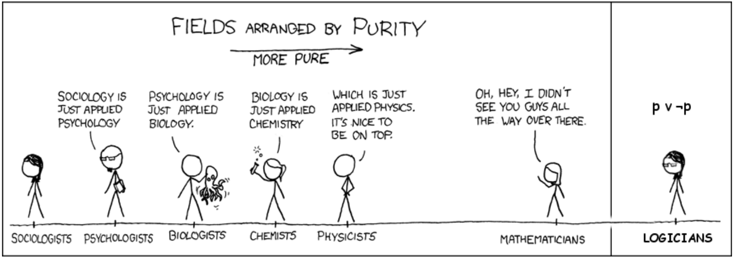
Formale Logik - SoSe 2012

Versuch einer Zusammenfassung

Malvin Gattinger



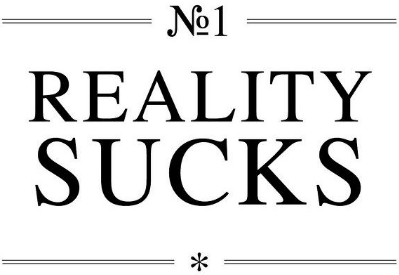
http://xkcd.com/435/

Gliederung

Gliederung

- Logik ist die Wissenschaft von den Gesetzen des Wahrseins und des Fürwahrhaltens.
- Logik beschreibt eine ideale Form des Denkens und Schließens.
- Logik beschäftigt sich *nicht* damit wie wir tatsächlich denken.

- Logik ist die Wissenschaft von den Gesetzen des Wahrseins und des Fürwahrhaltens.
- Logik beschreibt eine ideale Form des Denkens und Schließens.
- Logik beschäftigt sich *nicht* damit wie wir tatsächlich denken.



Gliederung

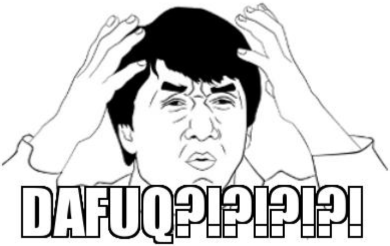
- Aussagesätze können wahr oder falsch sein.
- *Wahrheit* ist eine Eigenschaft von Aussagesätzen.
- Es gibt genau zwei Wahrheitswerte: Wahr, Falsch.

Gliederung

- Ein Argument ist eine Liste von Sätzen, von denen einer als Konklusion ausgewiesen ist. Die anderen Sätze heißen Prämissen.
- Ein Argument ist gültig genau dann, wenn es rational ist unter der Annahme, dass die Prämissen wahr sind, auch die Konklusion für wahr zu halten.
- Ein Argument ist schlüssig genau dann, wenn es gültig ist und seine Prämissen wahr sind.

Argumente können auch mal überhaupt keine Prämissen haben! Ein solches Argument das nur aus einer Konklusion besteht ist gültig wenn diese eine Tautologie ist. Damit ist es auch schlüssig, denn alle (=keine) seine Prämissen sind wahr. Solche Argumente heißen auch Theoreme.

Argumente können auch mal überhaupt keine Prämissen haben! Ein solches Argument das nur aus einer Konklusion besteht ist gültig wenn diese eine Tautologie ist. Damit ist es auch schlüssig, denn alle (=keine) seine Prämissen sind wahr. Solche Argumente heißen auch Theoreme.



Beispiel:

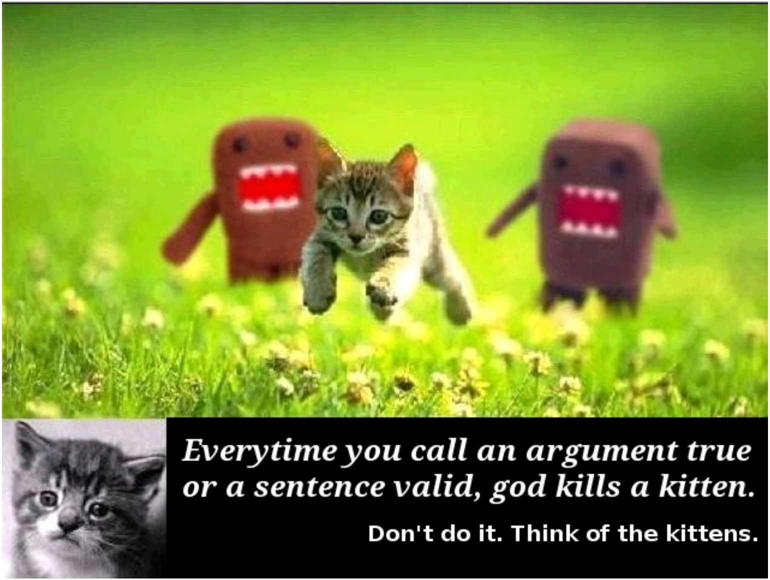
$$\vdash p \to (q \to p)$$

Also was wahr nochmal gültig?

31.71 %

Wahrheit ist eine Eigenschaft von Sätzen. Gültigkeit ist eine Eigenschaft von Argumenten.
Wahrheit ist eine Eigenschaft von Sätzen. Gültigkeit ist eine Eigenschaft von Argumenten.
Wahrheit ist eine Eigenschaft von Sätzen. Gültigkeit ist eine Eigenschaft von Argumenten.
Wahrheit ist eine Eigenschaft von Sätzen. Gültigkeit ist eine Eigenschaft von Argumenten.
Wahrheit ist eine Eigenschaft von Sätzen. Gültigkeit ist eine Eigenschaft von Argumenten.
Wahrheit ist eine Eigenschaft von Sätzen. Gültigkeit ist eine Eigenschaft von Argumenten.
Wahrheit ist eine Eigenschaft von Sätzen. Gültigkeit ist eine Eigenschaft von Argumenten.
Wahrheit ist eine Eigenschaft von Sätzen. Gültigkeit ist

34.15 %


Everytime you call an argument true
or a sentence valid, god kills a kitten.
Don't do it. Think of the kittens.

Gliederung

PropLog verwendet folgende Zeichen:

1. $p, q, r, \ldots$ für Elementarsätze
2. Junktoren:

$\neg$	$\wedge$	$\vee$
Negation	*Konjunktion*	*Disjunktion*
"nicht"	*"und"*	*"oder"*

$\rightarrow$	$\leftrightarrow$
Konditional	*Bikonditional*
"wenndann"	*"genau dann wenn"*

Beispiel-Satz: "Wenn Franz Erdbeer- oder Schokoladen-Eis isst, dann geht er nicht spazieren."

p : Franz isst Erdbeer-Eis.

q : Franz isst Schokoladen-Eis.

r : Franz geht spazieren.

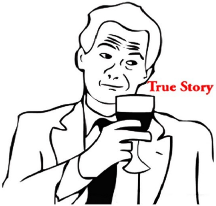
$$(p \vee q) \rightarrow \neg r$$

Gliederung

Beispiel-Aufgabe:
Prüfen Sie mit Hilfe einer Wahrheitstabelle ob der folgende Satz logisch wahr ist.

$$((p \to q) \land \neg q) \to \neg p$$

p	q	$p \to q$	$\neg q$	$(p \to q) \land \neg q$	$\neg p$	$((p \to q) \land \neg q) \to \neg p$
W	W	W	F	F	F	W
W	F	F	W	F	F	W
F	W	W	F	F	W	W
F	F	W	W	W	W	W



Gliederung

Mit einem semantischen Baum lässt sich (nur!) die Frage beantworten:

Ist dieser Satz eine Kontradiktion?

SEMANTISCHE Bäume,
denn die Grundfrage für alle 9 Regeln ist:

Was heißt es, dass dieser Satz wahr ist?


HIPSTER TREE
GROWING UPWARDS
IS TOO MAINSTREAM

Beispiel-Aufgabe:
Prüfen Sie mit Hilfe eines semantischen Baums ob der folgende Satz logisch wahr ist.

$$(\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow (q \rightarrow p)$$

a)

$$\begin{array}{llcl}
1. & & \neg((\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow (q \rightarrow p)) & (A) \\
2. & & \neg p \rightarrow \neg q & (1) \\
3. & & \neg(q \rightarrow p) & (1) \\
4. & & q & (3) \\
5. & & \neg p & (3) \\
6. & p & 7.\ \neg q & (2) \\
 & X & X &
\end{array}$$

Die Floskel zum auswendig lernen lautet: *Der negierte Satz liefert ausschließlich Widersprüche, d.h er ist eine Kontradiktion. Der ursprüngliche, nicht-negierte Satz ist also eine Tautologie.*

Beispiel-Aufgabe:
Prüfen Sie mit Hilfe eines semantischen Baums ob der folgende Satz logisch wahr ist.

1.	$\neg((\neg p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \rightarrow (\neg p \rightarrow \neg r))$	(A)
2.	$(\neg p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)$	(1)
3.	$\neg(\neg p \rightarrow \neg r)$	(1)
4.	$\neg p \rightarrow q$	(2)
5.	$q \rightarrow r$	(2)
6.	$\neg p$	(3)
7.	r	(3)

8.p 9.q (4)

X 10.$\neg q$ 11. r (5)

X ?

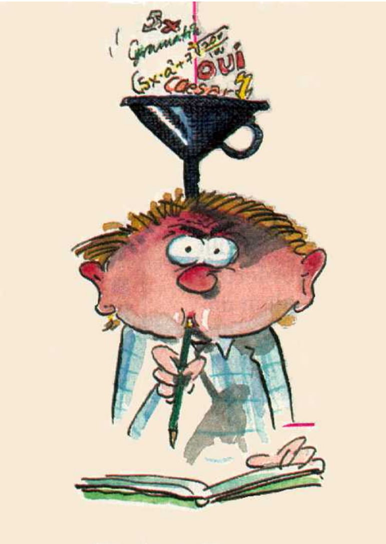
Der Baum bleibt offen, der negierte Satz ist also keine Kontradiktion. Der ursprüngliche, nicht-negierte Satz ist also keine Tautologie.

Gliederung

10 “einfache” Schlussregeln:

$$\begin{array}{ccccc} \wedge I & \wedge E & \vee I & \vee E & A \\ \rightarrow I & \rightarrow E & \leftrightarrow I & \leftrightarrow I & RAA \end{array}$$

Lesen! Lernen! Anwenden!
Verstehen!



Beispiel-Aufgabe:
Beweisen Sie das folgende Argument:

$$p \rightarrow \neg q,\ \neg p \rightarrow \neg r\ \vdash\ \neg(q \wedge r)$$

1	(1)	$p \rightarrow \neg q$	A
2	(2)	$\neg p \rightarrow \neg r$	A
	?		
	?		
	?		
	?		
	?		
	?		
	?		
	?		
	?		
	?		
1, 2	(??)	$\neg(q \wedge r)$	?

Falls es mal nicht klappt ...


~~Plan A~~
Plan B

Beispiel-Aufgabe:
Beweisen Sie das folgende Argument:

$$p \to \neg q, \neg p \to \neg r \vdash \neg(q \wedge r)$$

1	(1)	$p \to \neg q$	A
2	(2)	$\neg p \to \neg r$	A
3	(3)	$q \wedge r$	A
3	(4)	q	$3 \wedge E$
4	(5)	r	$3 \wedge E$
6	(6)	p	A
1, 6	(7)	$\neg q$	$1, 6 \to E$
1, 3	(8)	$\neg p$	$4, 7 RAA(6)$
9	(9)	$\neg p$	A
2, 9	(10)	$\neg r$	$2, 9 \to E$
2, 3	(11)	p	$4, 10 RAA(9)$
1, 2	(12)	$\neg(q \wedge r)$	$8, 11 RAA(3)$

Gliederung

PredLog verwendet folgendes Vokabular:

- Alles was es in *PropLog* schon gab
- Prädikate: F , G , H^3 ...
- Individuenkonstanten: a , b , ...
- Existenz und Allquantor: $\exists$, $\forall$
- Individuenvariablen: x , y, ...
- Das Identitätszeichen: $=$

Gliederung

6 weitere Regeln zur Einführung und Beseitigung der 3 neuen Zeichen:

$$\begin{array}{lll} \forall I & \exists I & = I \\ \forall E & \exists E & = E \end{array}$$

Beispiel-Aufgabe:
Beweisen Sie folgende beiden Satzfolgen:

$$\forall x(Px \rightarrow q) \dashv\vdash \exists xPx \rightarrow q$$

$\vdash$:

1	(1)	$\forall x(Px \rightarrow q)$	A
2	(2)	$\exists x Px$	A
3	(3)	Pa	A
1	(4)	$Pa \rightarrow q$	$1\forall E$
1, 3	(5)	q	$3, 4 \rightarrow E$
1, 2	(6)	q	$2, 5\exists E(3)$
1	(7)	$\exists x Px \rightarrow q$	$6 \rightarrow I(2)$

$\dashv$:

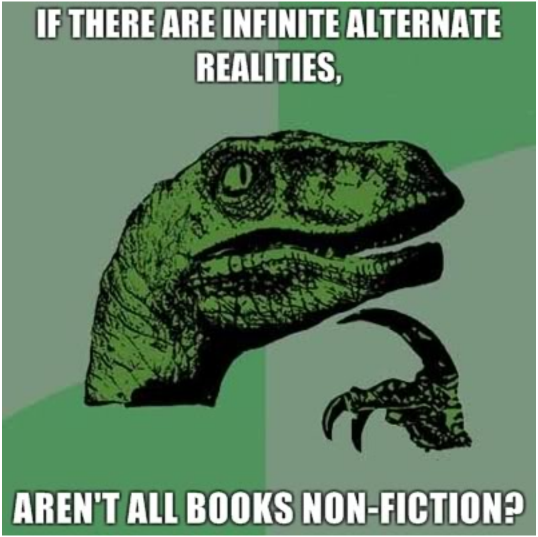
1	(1)	$\exists x Px \rightarrow q$	A
2	(2)	Pa	A
2	(3)	$\exists x Px$	$2 \exists I$
1, 2	(4)	q	$1, 3 \rightarrow E$
1	(5)	$Pa \rightarrow q$	$5 \rightarrow I(2)$
1	(6)	$\forall x(Px \rightarrow q)$	$5 \forall I$


Success.

Gliederung

Im Kalkül können Argumente nur bewiesen, aber nicht widerlegt werden! Die Tatsache, dass wir keinen Beweis finden zeigt *nicht* dass das Argument ungültig ist.
In diesem Fall konstruieren wir ein Gegenmodell indem wir eine mögliche / denkbare Welt erfinden.
Eine Interpretation (Modell) besteht immer aus:

- Universum
- Extensionen für Prädikate
- Wahrheitswerten für Elementarsätze


IF THERE ARE INFINITE ALTERNATE REALITIES,
AREN'T ALL BOOKS NON-FICTION?

http://w4eg.de/malvin/uni/logik12