Logik SS2012 - Übungsblatt 9

Malvin Gattinger

Aufgabe 1

(i)

	Satz	Expansion in $U : \{a\}$
(a)	$\forall x Fx$	Fa
(b)	$\forall x Fx \rightarrow \exists x Gx$	$Fa \rightarrow Ga$
(c)	$\exists x(Fx \vee Hx)$	$Fa \vee Ha$
(d)	$\neg(\forall x Gx \leftrightarrow \exists x(Hx \wedge \neg Fx))$	$\neg(Ga \leftrightarrow (Ha \wedge \neg Fa))$

(ii)

	Satz	Expansion in $U : \{a, b, c\}$
(a)	$\forall x Fx$	$Fa \wedge Fb \wedge Fc$
(b)	$\forall x Fx \rightarrow \exists x Gx$	$(Fa \wedge Fb \wedge Fc) \rightarrow (Ga \vee Gb \vee Gc)$
(c)	$\exists x(Fx \vee Hx)$	$(Fa \vee Ha) \vee (Fb \vee Hb) \vee (Fc \vee Hc)$
(d)	$\neg(\forall x Gx \leftrightarrow \exists x(Hx \wedge \neg Fx))$	$\neg(Ga \wedge Gb \wedge Gc \leftrightarrow (Ha \wedge \neg Fa) \vee (Hb \wedge \neg Fb) \vee (Hc \wedge \neg Fc))$

Aufgabe 2

(a)
U: {a}, F: {a}, G: {}, H: {}
P ist falsch

(a) $\forall x Fx$ expandiert in U zu Fa und ist wahr.

(b) $\forall x Fx \rightarrow \exists x Gx$ expandiert in U zu $Fa \rightarrow Ga$.

Fa	Ga	$Fa \rightarrow Ga$
W	F	F

(c) $\exists x(Fx \vee Hx)$ expandiert in U zu $Fa \vee Ha$

Fa	Ha	$Fa \vee Ha$
W	F	W

(d) $\neg(\forall x Gx \leftrightarrow \exists x(Hx \wedge \neg Fx))$ expandiert in U zu $\neg(Ga \leftrightarrow (Ha \wedge \neg Fa))$.

Fa	Ga	Ha	$\neg Fa$	$Ha \wedge \neg Fa$	$Ga \leftrightarrow (Ha \wedge \neg Fa)$	$\neg(Ga \leftrightarrow (Ha \wedge \neg Fa))$
W	F	F	F	F	W	F

(b)
U: {a,b}, F: {a}, G: {a,b}, H: {}
P ist wahr

(a) $\forall x Fx$ expandiert in U zu $Fa \wedge Fb$.

Fa	Fb	$Fa \wedge Fb$
W	F	F

(b) $\forall x Fx \rightarrow \exists x Gx$ expandiert in U zu $(Fa \wedge Fb) \rightarrow (Ga \vee Gb)$.

Fa	Fb	Ga	Gb	$Fa \wedge Fb$	$Ga \vee Gb$	$Fa \wedge Fb \rightarrow Ga \vee Gb$
W	F	W	W	F	W	W

(c) $\exists x(Fx \vee Hx)$ expandiert in U zu $(Fa \vee Ha) \vee (Fb \vee Hb)$.

Fa	Ha	Fb	Hb	$Fa \vee Ha$	$Fb \vee Hb$	$(Fa \vee Ha) \vee (Fb \vee Hb)$
W	F	F	F	W	F	W

(d) $\neg(\forall x Gx \leftrightarrow \exists x(Hx \wedge \neg Fx))$ expandiert in U zu $\neg((Ga \wedge Gb) \leftrightarrow (Ha \wedge \neg Fa) \vee (Hb \wedge \neg Fb))$.

$\neg$	((	Ga	$\wedge$	Gb	)	$\leftrightarrow$	(	Ha	$\wedge$	$\neg$	Fa	)	$\vee$	(	Hb	$\wedge$	$\neg$	Fb	))
		W		W				F		F	W				F		W	F	
			W						F							F			
			W										F						
						F													
W																			

Aufgabe 3

(a) $\forall x Fx \rightarrow \forall x Gx \vdash \forall x(Fx \rightarrow Gx)$
Für das Universum mit nur einem Element $U : \{a\}$ haben Prämisse und Konklusion die gleiche Expansion, daher benötigen wir für ein Gegenmodell mindestens zwei Elemente. Betrachten wir also die Expansionen in $U : \{a, b\}$:
Prämisse: $(Fa \wedge Fb) \rightarrow (Ga \wedge Gb)$
Konklusion: $(Fa \rightarrow Ga) \wedge (Fb \rightarrow Gb)$
Nun können wir zum Beispiel $F : \{a\}$, $G : \{b\}$ wählen und erhalten damit:
Prämisse:

(	Fa	$\wedge$	Fb	)	$\rightarrow$	(	Ga	$\wedge$	Gb	)
	W		F				F		W	
		F						F		
					W					

Konklusion:

(	Fa	$\rightarrow$	Ga	)	$\wedge$	(	Fb	$\rightarrow$	Gb	)
	W		F				F		W	
		F						W		
					F					

In der Interpretation $U : \{a, b\}, F : \{a\}, \; G : \{b\}$ sind die Prämisse des Arguments wahr und die Konklusion falsch. Also ist das Argument ungültig.

(b) $\exists x(Fx \vee Gx) \vdash \forall xFx \vee \forall xGx$
Interpretation: $U : \{a, b\}, F : \{a\}, G : \{\}$
Die Expansion der Prämisse $\exists x(Fx \vee Gx)$ in $U : \{a, b\}$ ist $(Fa \vee Ga) \vee (Fb \vee Gb)$.

(	Fa	$\vee$	Ga	)	$\vee$	(	Fb	$\vee$	Gb	)
	W		F				F		F	
		W						F		
					W					

Die Expansion der Konklusion $\forall xFx \vee \forall xGx$ in $U : \{a, b\}$ ist $(Fa \wedge Fb) \vee (Ga \wedge Gb)$.

(	Fa	$\wedge$	Fb	)	$\vee$	(	Ga	$\wedge$	Gb	)
	W		F				F		F	
		F						F		
					F					

In der Interpretation $U : \{a, b\}, F : \{a\}, G : \{\}$ sind die Prämisse des Arguments wahr und die Konklusion falsch. Also ist das Argument ungültig.

(c) $\forall x\exists yF^2xy \vdash \exists x\forall yF^2xy$
Interpretation: $U : \{a, b\}, F^2 : \{< a, a >, < b, b >\}$
Wir betrachten also die Expansionen in $U : \{a, b\}$:
Die Prämisse $\forall x\exists yF^2xy$ wird epxandiert zu $\forall x(F^2xa \vee F^2xb)$ und dies wird expandiert zu $(F^2aa \vee F^2ab) \wedge (F^2ba \vee F^2bb)$.

(	F^2aa	$\vee$	F^2ab	)	$\wedge$	(	F^2ba	$\vee$	F^2bb	)
	W		F				F		W	
		W						W		
					W					

Die Konklusion $\exists x\forall yF^2xy$ wird expandiert zu $\forall x(F^2xa \wedge F^2xb)$ und dies wird expandiert zu $(F^2aa \wedge F^2ab) \vee (F^2ba \wedge F^2bb)$,

(	F^2aa	$\wedge$	F^2ab	)	$\vee$	(	F^2ba	$\wedge$	F^2bb	)
	W		F				F		W	
		F						F		
					F					

In der Interpretation $U : \{a, b\}, F^2 : \{< a, a >, < b, b >\}$ sind die Prämisse des Arguments wahr und die Konklusion falsch. Also ist das Argument ungültig.