

**ACHTUNG: Dieses Blatt ersetzt weder ein Gehirn  
noch darf es in der Klausur verwendet werden! ☺**

## Das Regelkalkül - Zehn Regeln

Beweise schreiben wir in 4 Spalten auf:

Klasse	Zeilennummer	Satz	Annotation
--------	--------------	------	------------

Und was sollen die ganzen seltsamen Symbole und Buchstaben hier?

- $\phi, \Psi$  Sätze, also  $p, r, s, \dots$  oder auch komplexere Sätze wie „ $p \wedge q$ “
- $a, b, k$  Nummern der Zeilen auf die eine Regel angewendet wurde.
- $m, n$  Nummern der neu gebildete Zeilen.
- $\dots$  Die Klasse der bereits vorhandenen Zeilen.
- $\dots, \dots$  steht für das Übernehmen der Klassen aus beiden vorigen Zeilen.
- $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$  soll heißen, dass diese Zeilennummer aus der Klasse gestrichen werden darf.

### 1. Annahme

m	m	$\psi$	A
---	---	--------	---

Eine Annahme darf immer gemacht werden. Sie hat nie eine andere Klasse als sich selbst!

### 2. Kon-Intro

...	a	$\phi$	...
...	b	$\Psi$	...
..., ...	m	$\phi \wedge \Psi$	a, b $\wedge$ I

### 3. Kon-Elim

...	a	$\phi \wedge \Psi$	...
...	m	$\phi$	a $\wedge$ E
...	n	$\Psi$	a $\wedge$ E

Es müssen nicht beide Zeilen hingeschrieben werden, wenn sowieso nur eine gebraucht wird!

### 4. Dis-Intro

...	a	$\phi$	...
...	m	$\phi \vee \Psi$	a $\vee$ I

$\Psi$  darf beliebig gewählt werden!

### 5. Dis-Elim

...	a	$\phi \vee \Psi$	...
...	b	$\neg \phi$	...
..., ...	m	$\Psi$	a, b $\vee$ E

Analog kann auch das andere Disjunkt erzeugt werden.

### 6. Kd-Intro

a	a	$\phi$	A
...	b	$\Psi$	...
..., $\mathfrak{a}$	m	$\phi \rightarrow \Psi$	b $\rightarrow$ I (a)

### 7. Kd-Elim

...	a	$\phi \rightarrow \Psi$	...
...	b	$\phi$	...
..., ...	m	$\Psi$	a, b $\rightarrow$ E

### 8. reductio ad absurdum (RAA)

...	k	$\Psi$	A
...	a	$\phi$	...
..., k	b	$\neg \phi$	...
..., ..., $\mathfrak{k}$	m	$\neg \Psi$	a, b RAA (k)

Die Reihenfolge der Zeilen a, b, k ist egal. k kann auch in der Klasse von a stehen.

### 9. Bk-Intro

...	a	$\phi \rightarrow \Psi$	...
...	b	$\Psi \rightarrow \phi$	...
..., ...	m	$\phi \leftrightarrow \Psi$	a, b $\leftrightarrow$ I

### 10. Bk-Elim

...	a	$\phi \leftrightarrow \Psi$	...
...	m	$\Psi \rightarrow \phi$	a $\leftrightarrow$ E
..., ...	n	$\phi \rightarrow \Psi$	a $\leftrightarrow$ E

Es müssen nicht beide Zeilen hingeschrieben werden, wenn sowieso nur eine gebraucht wird!

# Generelle Tipps zum Aufstellen von Beweisen im Kalkül

## Beweisstrategien

Hier einige Strategien, die zwar **nicht immer** helfen bzw. „funktionieren“, aber bei 90% aller Kalküle zumindest eine erste Idee liefern, wie der Beweis laufen wird:

- **„von hinten denken“:** Überlege dir, was für eine Konklusion das Ziel des Beweises ist. Dies gibt (meistens) nämlich auch den letzten Schritt bzw. die in der letzten Zeile angewendete Regel an
  - Beispiel: Wenn die Konklusion ein Konditional( $\rightarrow$ ) ist, wird der letzte Schritt wohl eine Konditionaleinführung ( $\rightarrow I$ ) sein.
- **Widerspruchsbeweis:** Wenn die Konklusion nicht direkt aus den Prämissen hergeleitet werden kann, nimm die Negation der Konklusion an und versuche, sie zum Widerspruch mit den Prämissen zu führen. Theoreme (d.h. „Argumente ohne Prämissen“) werden fast immer auf diese Art und Weise bewiesen.
- **Beweis einer Disjunktion:** Wenn eine Disjunktion gezeigt werden soll, hilft es meist entweder eines der Disjunkte zu zeigen (da dann eine Disjunktionseinführung gemacht werden kann) oder es einen Widerspruchsbeweis zu machen.

## Fehler vermeiden

- Lerne die Regeln nicht einfach auswendig, sondern ihren Hintergrund und ihre Einsatzmöglichkeit, d.h. z.B. die Angaben, welche Art von Sätzen für Ihre Anwendung nötig ist, zum Beispiel: Kd-Intro benötigt immer eine Annahme-Zeile!
- Nur bei Kd-Intro und RAA dürfen Annahmen aus der Klasse gestrichen werden! Sonst immer alle Nummern aus den Klassen der verwendeten Zeilen „mitnehmen“!
- Immer mit der Ruhe: Niemals zwei Regeln auf einmal anwenden!
  - Beispiel: Auf die beiden Sätze  $p \leftrightarrow q$  und  $p$  kann nicht  $\rightarrow E$  angewendet werden, um  $q$  zu bekommen, sondern erst muss eine  $\leftrightarrow E$  gemacht werden, wodurch mensch  $p \rightarrow q$  und dann schließlich mit  $\rightarrow E$  das gewünschte  $q$  erhält.

## Semantische Bäume – 9 Regeln

1. $\neg\neg\phi$ $\phi$	2. $\phi \wedge \Psi$ $\phi$ $\Psi$	3. $\neg(\phi \wedge \Psi)$ $\neg\phi$ $\neg\Psi$
4. $\phi \vee \Psi$ $\phi$ $\Psi$	5. $\neg(\phi \vee \Psi)$ $\neg\phi$ $\neg\Psi$	8. $\phi \leftrightarrow \Psi$ $\phi$ $\neg\phi$ $\Psi$ $\neg\Psi$
6. $\phi \rightarrow \Psi$ $\neg\phi$ $\Psi$	7. $\neg(\phi \rightarrow \Psi)$ $\phi$ $\neg\Psi$	9. $\neg(\phi \leftrightarrow \Psi)$ $\neg\phi$ $\phi$ $\Psi$ $\neg\Psi$