# Logik SS2011 - Übungsblatt 9

Malvin Gattinger

## Aufgabe 1

(i)

| | Satz | Expansion in $U : \{a\}$ |
|---|---|---|
| (a) | $\forall x Fx$ | $Fa$ |
| (b) | $\forall x Fx \to \exists x Gx$ | $Fa \to Ga$ |
| (c) | $\exists x(Fx \lor Hx)$ | $Fa \lor Ha$ |
| (d) | $\forall x Fx \leftrightarrow \exists x(Fx \land \neg Hx)$ | $Fa \leftrightarrow (Fa \land \neg Ha)$ |
| (e) | $\neg \forall x(Fx \land Gx)$ | $\neg(Fa \land Ga)$ |

(ii)

| | Satz | Expansion in $U : \{a, b, c\}$ |
|---|---|---|
| (a) | $\forall x Fx$ | $Fa \land Fb \land Fc$ |
| (b) | $\forall x Fx \to \exists x Gx$ | $(Fa \land Fb \land Fc) \to (Ga \lor Gb \lor Gc)$ |
| (c) | $\exists x(Fx \lor Hx)$ | $(Fa \lor Ha) \lor (Fb \lor Hb) \lor (Fc \lor Hc)$ |
| (d) | $\forall x Fx \leftrightarrow \exists x(Fx \land \neg Hx)$ | $Fa \land Fb \land Fc \leftrightarrow (Fa \land \neg Ha) \lor (Fb \land \neg Hb) \lor (Fc \land \neg Hc)$ |
| (e) | $\neg \forall x(Fx \land Gx)$ | $\neg((Fa \land Ga) \land (Fb \land Gb) \land (Fc \land Gc))$ |

## Aufgabe 2

(a)
U: {a}, F: {a}, G: {}, H: {}
P ist falsch

(a) $\forall x Fx$ expandiert in U zu $Fa$ und ist wahr.

(b) $\forall x Fx \to \exists x Gx$ expandiert in U zu $Fa \to Ga$.

| $Fa$ | $Ga$ | $Fa \to Ga$ |
|---|---|---|
| $W$ | $F$ | $F$ |

(c) $\exists x(Fx \lor Hx)$ expandiert in U zu $Fa \lor Ha$

| $Fa$ | $Ha$ | $Fa \lor Ha$ |
|---|---|---|
| $W$ | $F$ | $W$ |

(d) $\forall xFx \leftrightarrow \exists x(Fx \wedge \neg Hx)$ expandiert in U zu $(Fa \wedge Fb) \leftrightarrow (Fa \wedge \neg Ha)$ .

| $Fa$ | $Ha$ | $\neg Ha$ | $Fa \wedge \neg Ha$ | $Fa \leftrightarrow (Fa \wedge \neg Ha)$ |
|---|---|---|---|---|
| $W$ | $F$ | $W$ | $W$ | $W$ |

saad

(e) $\neg\forall x(Fx \wedge Gx)$ expandiert in U zu $\neg(Fa \wedge Ga)$ .

| $Fa$ | $Ga$ | $Fa \wedge Ga$ | $\neg(Fa \wedge Ga)$ |
|---|---|---|---|
| $W$ | $F$ | $F$ | $W$ |

(b)
U: {a,b}, F: {a}, G: {a,b}, H: {}
P ist wahr

(a) $\forall xFx$ expandiert in U zu $Fa \wedge Fb$ .

| $Fa$ | $Fb$ | $Fa \wedge Fb$ |
|---|---|---|
| $W$ | $F$ | $F$ |

(b) $\forall xFx \rightarrow \exists xGx$ expandiert in U zu $(Fa \wedge Fb) \rightarrow (Ga \vee Gb)$ .

| $Fa$ | $Fb$ | $Ga$ | $Gb$ | $Fa \wedge Fb$ | $Ga \vee Gb$ | $Fa \wedge Fb \rightarrow Ga \vee Gb$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $W$ | $F$ | $W$ | $W$ | $F$ | $W$ | $W$ |

(c) $\exists x(Fx \vee Hx)$ expandiert in U zu $(Fa \vee Ha) \vee (Fb \vee Hb)$ .

| $Fa$ | $Ha$ | $Fb$ | $Hb$ | $Fa \vee Ha$ | $Fb \vee Hb$ | $(Fa \vee Ha) \vee (Fb \vee Hb)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $W$ | $F$ | $F$ | $F$ | $W$ | $F$ | $W$ |

(d) $\forall xFx \leftrightarrow \exists x(Fx \wedge \neg Hx)$ expandiert in U zu $(Fa \wedge Fb) \leftrightarrow (Fa \wedge \neg Ha) \vee (Fb \wedge \neg Hb)$ .

| ( | $Fa$ | $\wedge$ | $Fb$ | ) | $\leftrightarrow$ | ( | $Fa$ | $\wedge$ | $\neg$ | $Ha$ | ) | $\vee$ | ( | $Fb$ | $\wedge$ | $\neg$ | $Hb$ | ) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $W$ | | $F$ | | | | $W$ | | $W$ | $F$ | | | | $F$ | | $W$ | $F$ | |
| | | $F$ | | | | | | $W$ | | | | | | | $F$ | | | |
| | | $F$ | | | | | | | | | | $F$ | | | | | | |
| | | | | | $F$ | | | | | | | | | | | | | |

(e) $\neg\forall x(Fx \wedge Gx)$ expandiert in U zu $\neg((Fa \wedge Ga) \wedge (Fb \wedge Gb))$ .

| $\neg$ | ( | ( | $Fa$ | $\wedge$ | $Ga$ | ) | $\wedge$ | ( | $Fb$ | $\wedge$ | $Gb$ | ) | ) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | $W$ | | $W$ | | | | $F$ | | $W$ | | |
| | | | | $W$ | | | | | | $F$ | | | |
| | | | | | | | $F$ | | | | | | |
| $W$ | | | | | | | | | | | | | |

# Aufgabe 3

(a) $\forall xFx \to \forall xGx \vdash \forall x(Fx \to Gx)$
Für das Universum mit nur einem Element $U : \{a\}$ haben Prämisse und Konklusion die gleiche Expansion, daher benötigen wir für ein Gegenbeispiel mindestens zwei Elemente. Betrachten wir also die Expansionen in $U : \{a, b\}$:
Prämisse: $(Fa \wedge Fb) \to (Ga \wedge Gb)$
Konklusion: $(Fa \to Ga) \wedge (Fb \to Gb)$

Nun können wir zum Beispiel $F : \{a\}$, $G : \{b\}$ wählen und erhalten damit:

Prämisse:

| ( | $Fa$ | $\wedge$ | $Fb$ | ) | $\to$ | ( | $Ga$ | $\wedge$ | $Gb$ | ) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $W$ | | $F$ | | | | $F$ | | $W$ | |
| | | $F$ | | | | | | $F$ | | |
| | | | | | $W$ | | | | | |

Konklusion:

| ( | $Fa$ | $\to$ | $Ga$ | ) | $\wedge$ | ( | $Fb$ | $\to$ | $Gb$ | ) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $W$ | | $F$ | | | | $F$ | | $W$ | |
| | | $F$ | | | | | | $W$ | | |
| | | | | | $F$ | | | | | |

In der Interpretation $U : \{a, b\}, F : \{a\}$, $G : \{b\}$ sind die Prämisse des Arguments wahr und die Konklusion falsch. Also ist das Argument ungültig.

(b) $\exists x(Fx \vee Gx) \vdash \forall xFx \vee \forall xGx$
Interpretation: $U : \{a, b\}, F : \{a\}, G : \{\}$

Die Expansion der Prämisse $\exists x(Fx \vee Gx)$ in $U : \{a, b\}$ ist $(Fa \vee Ga) \vee (Fb \vee Gb)$ .

| ( | $Fa$ | $\vee$ | $Ga$ | ) | $\vee$ | ( | $Fb$ | $\vee$ | $Gb$ | ) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $W$ | | $F$ | | | | $F$ | | $F$ | |
| | | $W$ | | | | | | $F$ | | |
| | | | | | $W$ | | | | | |

Die Expansion der Konklusion $\forall xFx \vee \forall xGx$ in $U : \{a, b\}$ ist $(Fa \wedge Fb) \vee (Ga \wedge Gb)$ .

| ( | $Fa$ | $\wedge$ | $Fb$ | ) | $\vee$ | ( | $Ga$ | $\wedge$ | $Gb$ | ) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $W$ | | $F$ | | | | $F$ | | $F$ | |
| | | $F$ | | | | | | $F$ | | |
| | | | | | $F$ | | | | | |

In der Interpretation $U : \{a, b\}, F : \{a\}, G : \{\}$ sind die Prämisse des Arguments wahr und die Konklusion falsch. Also ist das Argument ungültig.

(c) $\forall x \exists y F^2xy \vdash \exists x \forall y F^2xy$
Interpretation: $U : \{a, b\}, F^2 : \{< a, a >, < b, b >\}$
Wir betrachten also die Expansionen in $U : \{a, b\}$:
Die Prämisse $\forall x \exists y F^2xy$ wird epxandiert zu $\forall x(F^2xa \vee F^2xb)$ und dies wird expandiert zu $(F^2aa \vee F^2ab) \wedge (F^2ba \vee F^2bb)$ .

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ( | $F^2aa$ | $\vee$ | $F^2ab$ | ) | $\wedge$ | ( | $F^2ba$ | $\vee$ | $F^2bb$ | ) |
| | $W$ | | $F$ | | | | $F$ | | $W$ | |
| | | $W$ | | | | | | $W$ | | |
| | | | | | $W$ | | | | | |

Die Konklusion $\exists x \forall y F^2xy$ wird expandiert zu $\forall x(F^2xa \wedge F^2xb)$ und dies wird expandiert zu $(F^2aa \wedge F^2ab) \vee (F^2ba \wedge F^2bb)$ ,

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ( | $F^2aa$ | $\wedge$ | $F^2ab$ | ) | $\vee$ | ( | $F^2ba$ | $\wedge$ | $F^2bb$ | ) |
| | $W$ | | $F$ | | | | $F$ | | $W$ | |
| | | $F$ | | | | | | $F$ | | |
| | | | | | $F$ | | | | | |

In der Interpretation $U : \{a, b\}, F^2 : \{< a, a >, < b, b >\}$ sind die Prämisse des Arguments wahr und die Konklusion falsch. Also ist das Argument ungültig.